

30/04/15

$$- A = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid f: \text{συμπεριεχόμενη}\}$$

$$- U = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \in \mathbb{N} \text{ ζυγία αντισυμμετρική}\} = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid f(1) \neq 0\}$$

$$- M = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ πολλαπλασιαστική}\} = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \neq 0, (m, n) = 1 \Rightarrow f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)\}$$

Υποψέφε ότι $f, g \in U \Rightarrow f * g \in U$
 $f \in U \Rightarrow f^{-1} \in U$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ : $f, g \in M \Rightarrow f * g \in M$
 $f \in M \Rightarrow f^{-1} \in M$

Λήμμα : Έστω $(m, n) = 1$. Τότε ① $d \mid m, n \Rightarrow \exists d_1, d_2 \in \mathbb{N} : d = d_1 d_2$
 όπου $d_1 \mid m$ κ' $d_2 \mid n$ και $(d_1, d_2) = 1$ ②. Ειδικότερα θα είναι
 και $(\frac{m}{d_1}, \frac{n}{d_2}) = 1$ ③. Αν επίσης $d = d'_1 d'_2$ όπου $d'_1 \mid m$ κ' $d'_2 \mid n$ και
 $(d'_1, d'_2) = 1 \Rightarrow d_1 = d'_1$ κ' $d_2 = d'_2$.

Απόδειξη : ① Έστω $d \mid m, n$. Αν $m=1$ ή $n=1$ τότε το ζητούμενο
 είναι προφανές (αν $m=1$ τότε $d_1=1, d_2=n$ και
 $d = (d_1, d_2) = (1, n) = 1$).

Υποδ. ότι $m, n > 1$. Τότε:

$$m = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}, n = q_1^{\beta_1} \dots q_l^{\beta_l} \text{ κ' } \forall i, j : p_i \neq q_j \text{ (αφού } (m, n) = 1 \text{)}$$

$$\Rightarrow m \cdot n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \cdot q_1^{\beta_1} \dots q_l^{\beta_l}$$

$$\text{Επειδή } d \mid m \cdot n \Rightarrow d = \underbrace{p_1^{\delta_1} \dots p_k^{\delta_k}}_{d_1} \cdot \underbrace{q_1^{\delta'_1} \dots q_l^{\delta'_l}}_{d_2}, \quad 0 \leq \delta_i \leq \alpha_i \text{ κ' } 0 \leq \delta'_i \leq \beta_i$$

$\forall i=1, \dots, k, \forall i=1, \dots, l$

Τότε $d_1 = p_1^{\delta_1} \dots p_k^{\delta_k}, d_2 = q_1^{\delta'_1} \dots q_l^{\delta'_l}$ θα έχουμε
 $d = d_1 d_2$ κ' $d_1 \mid m, d_2 \mid n$ κ' $(d_1, d_2) = 1$ διότι
 $d_2 = q_1^{\delta'_1} \dots q_l^{\delta'_l} \text{ } \forall i, j : p_i \neq q_j$

② Έστω $z = (\frac{m}{d_1}, \frac{n}{d_2})$. Αν $z \neq 1 \Rightarrow \exists$ πρώτος διαιρέτης $p \mid z \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p \mid \frac{m}{d_1} \Rightarrow \frac{m}{d_1} = p \cdot x \\ p \mid \frac{n}{d_2} \Rightarrow \frac{n}{d_2} = p \cdot y \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{p \mid m}{p \mid n} \Rightarrow p \mid (m, n) = 1 \text{ ΑΠΟΡΟ (} p \geq 2 \text{)}$$

$\alpha \alpha \alpha z = 1$

③ (Μοναδικότητα).

Έστω $d = d' \cdot d_2'$ όπου d'/m κ' d_2'/n και $(d', d_2') = 1$

$$\left. \begin{array}{l} d'/m \Rightarrow d' = p_1^{\delta_1'} \cdot \dots \cdot p_k^{\delta_k'} \\ d_2' = q_1^{\delta_1'} \cdot \dots \cdot q_\lambda^{\delta_\lambda'} \end{array} \right\} \Rightarrow d = d' \cdot d_2' = p_1^{\delta_1'} \cdot \dots \cdot p_k^{\delta_k'} \cdot q_1^{\delta_1'} \cdot \dots \cdot q_\lambda^{\delta_\lambda'} =$$

$$= p_1^{\delta_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\delta_k} \cdot q_1^{\delta_1} \cdot \dots \cdot q_\lambda^{\delta_\lambda} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \delta_i = \delta_i' \quad 1 \leq i \leq k$ (διότι έχουμε μοναδικότητα
 $\delta_i = \delta_i' \quad 1 \leq i \leq \lambda$ στις πρωτογενείς ανελκείς).

Πρόταση: $f, g \in M \Rightarrow (f * g) \in M$.

Απόδειξη:

$$f, g \in M \Rightarrow f(1) = 1 = g(1), \text{ τότε } (f * g)(1) = f(1) \cdot g(1) = 1 \neq 0 \Rightarrow f * g \neq 0$$

Έστω $(\alpha, b) \in \mathbb{N}^2$ τέ $(\alpha, b) = 1$

$$\text{Ο.Δ.Ο. } (f * g)(\alpha \cdot b) = (f * g)(\alpha) \cdot (f * g)(b)$$

$$(f * g)(\alpha b) = \sum_{d|\alpha b} f(d) g\left(\frac{\alpha b}{d}\right) \stackrel{\text{ΛΗΜΜΑ}}{=} \sum_{\substack{m|\alpha, n|b \\ (m, n)=1}} f(m \cdot n) g\left(\frac{\alpha \cdot b}{m \cdot n}\right) =$$

$$\stackrel{\text{ΛΗΜΜΑ}}{=} \sum_{\substack{m|\alpha \\ (m, n)=1}} f(m) f(n) g\left(\frac{\alpha}{m}\right) g\left(\frac{b}{n}\right) =$$

~~to $\sum_{n|b} f(n) g\left(\frac{b}{n}\right)$ είναι ανεξάρτητο του m~~

$$= \sum_{m|\alpha} f(m) g\left(\frac{\alpha}{m}\right) \cdot \sum_{n|b} f(n) g\left(\frac{b}{n}\right) = (f * g)(\alpha) \cdot (f * g)(b).$$

←

Πρόταση: Έστω $f \in M$. Τότε η ευρέως $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$,
 $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ είναι πολλαπλή

Απόδειξη:

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) \cdot 1 = \sum_{d|n} f(d) v\left(\frac{n}{d}\right) = (f * v)(n), \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = f * v \left\{ \begin{array}{l} v \in M \end{array} \right\} \Rightarrow F = (f * v) \in M.$$

- Παράδειγμα: Έστω $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ κ' έστω η συνάρτηση $G_k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$,
 $G_k(n) = \sum_{d|n} d^k$. Είναι η G_k πολλαπλασιαστική;

Υπόδειξη:

$$G_0 = \mathbb{I}, G_1 = G$$

Θεωρούμε την $N^k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $N^k(n) = n^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Τότε $N^k(1) = 1^k = 1 \neq 0 \Rightarrow N^k \neq 0$

$$N^k(m \cdot n) = (m \cdot n)^k = (m)^k \cdot (n)^k = N^k(m) \cdot N^k(n)$$

κ' άρα $N^k \in M$.

$$\text{Τότε } G_k(n) = \sum_{d|n} d^k = \sum_{d|n} N^k(d) \Rightarrow G_k = N^k * \mathbb{I} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (G_k) \in M.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Πορίζεται $G, \mathbb{I} \in M$

Πρόταση: $f \in M \Rightarrow f^{-1} \in M$

Απόδειξη: $f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)} = \frac{1}{1} = 1 \neq 0 \Rightarrow f^{-1} \neq 0$.

Θ.δ.ο. $(m, n) = 1 \Rightarrow f^{-1}(m \cdot n) = f^{-1}(m) \cdot f^{-1}(n)$.

Η απόδειξη θα γίνει με χρήση μαθηματικής επαγωγής.

• Αν $m, n \in \mathbb{N}$, $(m, n) = 1$ και $m \cdot n = 1$ ΤΟΤΕ $m=1, n=1$

και προφανώς $f^{-1}(m \cdot n) = f^{-1}(1) = 1 = 1 \cdot 1 = f^{-1}(m) \cdot f^{-1}(n)$.

• Επαγωγική Υπόθεση: $f^{-1}(s \cdot t) = f^{-1}(s) \cdot f^{-1}(t)$, $\forall s, t \in \mathbb{N}$
 με $(s, t) = 1$ και $1 \leq s, t \leq m \cdot n$. (*)

$$\mathbb{E}(n) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & n>1 \end{cases}$$

$$f^{-1} * f = \mathbb{E} \text{ και προφανώς η } \mathbb{E} \text{ πολλαπλασιαστική}$$

$$\text{δηλ } \mathbb{E} \in M \Rightarrow (f^{-1} * f) \in M$$

Έστω $m, n \in \mathbb{N}$ και $(m, n) = 1$

$$\text{Τότε } (f^{-1} * f)(m \cdot n) = (f^{-1} * f)(m) * (f^{-1} * f)(n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{d|m \cdot n} f^{-1}(d) f\left(\frac{m \cdot n}{d}\right) = \sum_{d|m} f^{-1}(d) f\left(\frac{m}{d}\right) \cdot \sum_{d|n} f^{-1}(d) f\left(\frac{n}{d}\right) \Rightarrow$$

~~QED~~

$$\begin{aligned} \text{1η ΜΜΑ} \Rightarrow \sum_{\substack{st/mn \\ (s,t)=1 \\ s|m, t|n}} f^{-1}(st) \cdot f\left(\frac{mn}{st}\right) &= \sum_{s|m} f^{-1}(s) f\left(\frac{m}{s}\right) \cdot \sum_{t|n} f^{-1}(t) f\left(\frac{n}{t}\right) \\ &= \sum_{s|m, t|n} f^{-1}(s) f^{-1}(t) f\left(\frac{mn}{s}\right) f\left(\frac{n}{t}\right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{f \text{ πολλαπλή}} \\ &\left(\frac{m}{s}, \frac{n}{t}\right) = 1 \\ &\text{2η ΜΜΑ} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{s|m, t|n} f^{-1}(st) f\left(\frac{mn}{st}\right) = \sum_{s|m, t|n} f^{-1}(s) f^{-1}(t) f\left(\frac{mn}{st}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{s|m, t|n} [f^{-1}(st) - f^{-1}(s) f^{-1}(t)] f\left(\frac{mn}{st}\right) = 0 \quad (*)$$

$$(*) \Rightarrow [f^{-1}(mn) - f^{-1}(m) \cdot f^{-1}(n)] f\left(\frac{mn}{mn}\right) = 0 \Rightarrow \quad \xrightarrow{1 (f \text{ πολλαπλή})}$$

$$\Rightarrow \boxed{f^{-1}(mn) = f^{-1}(m) \cdot f^{-1}(n)} \Rightarrow \boxed{f^{-1} \in M}$$

⇐

* $M \subseteq \mathcal{U} \subseteq A$: εφοδιασμένα με την πράξη $*$.

Τότε $(A, *)$: μονοειδές

$(\mathcal{U}, *)$: αβελιανή ομάδα

$(M, *)$: υποομάδα του $(\mathcal{U}, *)$.

⇐

Εφαρμογή :

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & \text{αν } \exists P: \text{πρώτος} : P^2 | n \\ (-1)^k, & n = P_1 \cdots P_k \leftarrow \text{πρωτ. ανάλυση.} \end{cases}$$

Γνωρίζουμε ότι μ πολλαπλή

$$\left. \begin{aligned} &\text{Γνωρίζουμε ότι } \mu = \chi^{-1} \\ &\forall \chi \in M \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mu \in M.$$

Πρόταση: $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{d|n} \mu(d)$

Απόδειξη: $\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot 1 = \sum_{d|n} \mu(d) V\left(\frac{n}{d}\right) =$
 $= (\mu * V)(n) = E(n) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & n>1. \end{cases}$

Ενδομετρική: $\mu \in M \Rightarrow F(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \in M \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}, F(n) = F(p_1^{\alpha_1}) \dots F(p_k^{\alpha_k})$

Αρκεί να υπολ. $F(p^{\alpha}) = \sum_{d|p^{\alpha}} \mu(d) = \mu(1) + \mu(p) = 1 + (-1) = 0$

Οπότε $\sum_{d|n} \mu(d) = 0, \forall n > 1$

Για $n=1 \Rightarrow \sum_{d|1} \mu(d) = \mu(1) = 1$



(*) Πρόταση (*): Έστω $f \in M$ και $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ πρωτ. αντιστοιχ. του $n > 1$.

Τότε: $\sum_{d|n} \mu(d) f(d) = (1 - f(p_1)) (1 - f(p_2)) \dots (1 - f(p_k))$

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mu \cdot f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$
 ώστε $(\mu \cdot f)(n) = \mu(n) \cdot f(n)$.

Εύκολα βλέπουμε ότι είναι $f, \mu \in M$ οπότε $\mu \cdot f \in M$

Τότε η συνάρτηση $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, F(n) = \sum_{d|n} (\mu \cdot f)(d) =$

$= \sum_{d|n} \mu(d) \cdot f(d)$ είναι nat/kin $\Rightarrow$

$\Rightarrow F(n) = F(p_1^{\alpha_1}) \dots F(p_k^{\alpha_k})$.

$\forall i=1, \dots, k : F(p_i^{\alpha_i}) = \sum_{d|p_i^{\alpha_i}} \mu(d) f(d) =$

$= \mu(1) f(1) + \mu(p_i) f(p_i) + \dots + \mu(p_i^{\alpha_i}) f(p_i^{\alpha_i}) =$

$$= \mu(1)f(1) + \mu(P_i)f(P_i) = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot f(P_i) = 1 - f(P_i)$$

$$\sum_{d|m} \mu(d)f(d) = F(m) = (1-f(P_1))(1-f(P_2)) \cdots (1-f(P_k))$$



Παράδειγμα : $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ ηρωταζομένης συνάρτησης του $n > 1$.

$$\textcircled{1} \sum_{d|n} \mu(d)\tau(d) = (1-\tau(P_1)) \cdots (1-\tau(P_k)) =$$

$$= (1-2)(1-2) \cdots (1-2) = (-1) \cdots (-1) = (-1)^k.$$

$$\text{Γενικά} \quad \sum_{d|m} \mu(d)\tau(d) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ (-1)^k, & n>1 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \textcircled{2} \sum_{d|m} \mu(d)\phi(d) &= (1-\phi(P_1)) \cdots (1-\phi(P_k)) = \\ &= (1-1-P_1) \cdots (1-1-P_k) = \\ &= (-P_1) \cdots (-P_k) = \\ &= (-1)^k P_1 \cdots P_k. \end{aligned}$$



* Θεώρημα (Τίμος Αντιφωτισμός του Möbius) : Έστω $f, g \in A$. Τότε :

$$\textcircled{1} g(m) = \sum_{d|m} f(d) \Leftrightarrow \textcircled{2} f(m) = \sum_{d|m} \mu(d)g\left(\frac{m}{d}\right), \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Απόδειξη : $\textcircled{1} : g(m) = \sum_{d|m} f(d) = \sum_{d|m} f(d) \cdot v\left(\frac{m}{d}\right) = (f * v)(m), \quad \forall m \geq 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \textcircled{1} \boxed{g = f * v}$$

$$\textcircled{2} \quad f(m) = \sum_{d|m} \mu(d)g\left(\frac{m}{d}\right) \Rightarrow \textcircled{2} \boxed{f = \mu * g}$$

Άρα αρκεί να δούμε $\boxed{g = f * v \Leftrightarrow f = \mu * g}$

$$\S \quad g = f * v \Rightarrow \mu * g = \mu * (f * v) = (\mu * f) * v = \\ = (f * \mu) * v = f * (\mu * v) = f * \varepsilon = f$$

$$\text{Άρα από } g = f * v \Rightarrow f = \mu * g$$

Άρα βγαίνει ότι οι πράξεις που έχουν είναι αντιστροφές.

$$f = \mu * g \Rightarrow f * v = (\mu * g) * v = \mu * (g * v) = \mu * (v * g) = \\ = (\mu * v) * g = \varepsilon * g = g$$

$$\S \Rightarrow \boxed{g = f * v \Leftrightarrow f = \mu * g}$$

—

Πρόταση: Έστω $f, g \in A$. Τότε αν $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$, τότε:

Αντίστροφο: ($\Leftarrow$) Έστω ότι $f \in M$. Τότε $g(n) = \sum_{d|n} f(d) =$

$$= \sum_{d|n} f(d) \cdot v\left(\frac{n}{d}\right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} g = f * v \\ f, v \in M \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{g = (f * v) \in M}$$

($\Rightarrow$). Έστω ~~$g \in M$~~ $g \in M$. Τότε έχουμε

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d), \text{ από τον νόμο αντιστ. του Möbius}$$

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g(n/d) = (\mu * g)(n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} f = \mu * g \\ \mu, g \in M \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{f \in M}$$

$$\bullet \varepsilon(n) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & n>1 \end{cases}$$

$$\bullet v(n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\bullet I(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\bullet \mu(n) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & \exists p: n \text{ divisible by } p^2 \\ (-1)^k, & n = p_1 \dots p_k \end{cases}$$

$$\bullet T(n) = \sum_{d|n} 1 = \sum_{d|n} v(d) = \sum_{d|n} v(d) \cdot v\left(\frac{n}{d}\right) =$$

$$= (v * v)(n) \Rightarrow \boxed{T = v * v}$$

$$\bullet G(n) = \sum_{d|n} I(d) = \sum_{d|n} I(d) =$$

$$= \sum_{d|n} I(d) \cdot v\left(\frac{n}{d}\right) = (I * v)(n) \Rightarrow \boxed{G = I * v}$$

$$\rightarrow T = v * v \Rightarrow \boxed{\mu * T = v}$$

$$\bullet \varphi(n) = \left| \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \begin{matrix} 1 \leq k \leq n \\ (k, n) = 1 \end{matrix} \right\} \right|$$

$$\underline{\text{Θωρημα Gauss}} : n = \sum_{d|n} \varphi(d) \Leftrightarrow \boxed{i = \varphi * v}$$

$$\bullet \lambda(n) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ (-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_k}, & n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \end{cases}$$

$$\underline{\text{Θωρημα}} : f \text{ αντιστρέφεται modulo } k \Leftrightarrow f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$$

$$\underline{\text{Προταση}} : f \in M. \text{ τότε } f \text{ αντιστρέφεται modulo } k \Leftrightarrow f^{-1} = \mu \cdot f$$

$$\underline{\text{Απόδειξη}} : (\Rightarrow) \text{ Έστω } f \text{ αντιστρέφεται modulo } k$$

$$\text{Θ.δ.ο. } (\mu \cdot f) * f = \varepsilon = f * (\mu \cdot f)$$

$$[(\mu \cdot f) * f](n) = \sum_{d|n} (\mu \cdot f)(d) \cdot f\left(\frac{n}{d}\right) =$$

$$= \sum_{d|n} \mu(d) f(d) f\left(\frac{n}{d}\right) \stackrel{\text{f σίμπος νόμος}}{=} \sum_{d|n} \mu(d) f\left(d \cdot \frac{n}{d}\right) =$$

$$= \sum_{d|n} \mu(d) f(n) = f(n) \sum_{d|n} \mu(d) = \text{ε}(n)$$

$$= f(n) \cdot \varepsilon(n) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & n>1 \end{cases} = \varepsilon(n)$$

$$\text{Άρα } (\mu \cdot f) * f = \varepsilon = f * (\mu \cdot f) \Rightarrow \boxed{\mu \cdot f = f^{-1}}$$

($\Leftarrow$) Έστω ότι $\mu \cdot f = f^{-1}$. Οπότε $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$, δηλαδή

• Θα δείξουμε πρώτα ότι $f(p^\alpha) = [f(p)]^\alpha$, $\forall p$ πρώτος p και $\alpha \in \mathbb{N}$. ①

$$\text{Και τότε } \forall n \geq 1: f(n) = f(p_1^{\alpha_1}) \cdot \dots \cdot f(p_k^{\alpha_k}) =$$

$$= [f(p_1)]^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot [f(p_k)]^{\alpha_k}$$

$$\text{και άρα αν } n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

$$m = q_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot q_l^{\beta_l}$$

$$\begin{aligned} \text{Τότε } f(m \cdot n) &= f(p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} \cdot q_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot q_l^{\beta_l}) = \\ &= [f(p_1)]^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot [f(p_k)]^{\alpha_k} [f(q_1)]^{\beta_1} \cdot \dots \cdot [f(q_l)]^{\beta_l} = \\ &= f(m) \cdot f(n) \Rightarrow f \text{ σίμπος νόμος} \end{aligned}$$

Απόδειξη: Με επαγωγή στο $\alpha \geq 1$.

$$\text{Αν } \alpha=1, \text{ τότε } f(p^\alpha) = f(p^1) = f(p) = [f(p)]^1 = f(p)$$

Επαγωγική Υπόθεση: $\forall k: f(p^k) = f(p)^k, \forall k: 1 \leq k < \alpha$

$$f * f^{-1} = \varepsilon \Rightarrow (\mu \cdot f) * f = \varepsilon \Rightarrow [(\mu \cdot f) * f](p^\alpha) =$$

$$= \varepsilon(p^\alpha) = 0 \quad (\alpha \neq 0 \quad P: \text{prime} \quad \kappa' \quad \alpha \in \mathbb{N}(\alpha > 1)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{d|p^\alpha} (\mu f)(d) f\left(\frac{p^\alpha}{d}\right) = 0 \Rightarrow \sum_{d|p^\alpha} \mu(d) f(d) f\left(\frac{p^\alpha}{d}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu(1) f(1) \cdot f\left(\frac{p^\alpha}{1}\right) + \mu(p) f(p) f\left(\frac{p^\alpha}{p}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(p^\alpha) - f(p) f(p^{\alpha-1}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(p^\alpha) = f(p) \cdot f(p^{\alpha-1}) \stackrel{\substack{\text{E}_{n-1} \\ \text{IH}}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f(p^\alpha) = f(p) \cdot [f(p)]^{\alpha-1} = [f(p)]^\alpha //$$

Αρα f multiplicative πολλαπλασιαστική.